Scheda 1

Esercizio 1: Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'' - y = xe^x$$

Esercizio 2: Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y''' - y'' - y' + y = e^x + e^{-x}$$

[Suggerimento: si risolvano separatamente $y''' - y'' - y' + y = e^x$ e $y''' - y'' - y' + y = e^{-x}$. Si sommino poi le due soluzioni particolari e le soluzioni dell'omogenea associata per trovare tutte le soluzioni dell'equazione iniziale]

Esercizio 3: Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y + \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Determinare i punti in cui f è differenziabile.

Esercizio 4: Dimostrare che la forma differenziale ω definita da

$$\omega(x,y) = \frac{1}{e^{x+y}+1}\,dx - \frac{e^{x+y}}{e^{x+y}+1}\,dy,$$

per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, è esatta e calcolarne una primitiva.

Esercizio 5: Determinare i punti di massimo o minimi relativo della funzione

$$f(x,y) = 2x^2y + 2xy^2 - x^2y^2 - 4xy$$

[Dovrebbero risultare 5 punti critici.]

Esercizio 6: Determinare i punti di massimo o di minimo relativo della seguente funzione

$$f(x,y) = 2x^2(x^2 - x - 2)^4 + (x^2 - 2y)^4$$

[Suggerimento: ci si limiti a calcolare la derivata seconda in y per dedurre la forma dell'Hessiana; si usi poi il metodo della derivata in una variabile per determinare i massimi e i minimi]

Soluzioni

Esercizio 1: Soluzione particolare $\psi(x) = \frac{1}{4}(x^2 - x)e^x$. Soluzioni dell'omogenea associata: $c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2: Soluzione particolare: $\psi(x) = \frac{xe^{-x}}{4} + \frac{x^2 e^x}{4}$. Soluzioni dell'omogenea associata: $c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-x}$ al variare di $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3: f è differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$. $df(0,0) = dx + dy$.

Esercizio 4: Una primitiva è $F(x, y) = -\log(e^{x+y} + 1) + x$.

Esercizio 5: I punti critici sono $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,2)$, $(2,2)$ (punti di sella) e $(1,1)$ (min.relativo).

Esercizio 6: I punti critici sono $(0,0)$, $(2,2)$, $(-1,1/2)$, $(1,1/2)$, $(-2/5, 2/25)$, tutti sulla curva $y = x^2/2$, che infatti è curva di minimi per f nella variabile y. I primi tre punti critici sono di minimo relativo, gli altri due sono punti di sella.